

# INTEGRACIÓN DE SEÑALES CONTINUAS DE LONGITUD FINITA O PERIÓDICAS USANDO LA DFT

Camilo Vejarano A.\* y Alfredo Restrepo P.\*\*

## RESUMEN

*Se presenta una relación entre los coeficientes de la serie de Fourier de una señal continua de duración finita o periódica  $g(t)$  y la DFT de la señal discreta  $x_n$  que resulta al tomar  $N$  muestras de  $g(t)$  en el intervalo en que se encuentra definida, o en un periodo. A partir de esta relación se deriva un método para obtener muestras de la integral de  $g(t)$  usando la DFT de sus muestras, cuando  $g$  está limitada en frecuencia (en el sentido de que tiene un número finito de coeficientes de Fourier) y se muestra una aplicación en la integración de señales sísmicas de aceleración.*

## 1. INTRODUCCIÓN

La motivación inicial de este trabajo fue generar un método alternativo para la integración de señales sísmicas digitales de aceleración, como asesoría de los autores a un proyecto de procesamiento e interpretación de información sísmica [1]. En vez de usar una rutina de integración típica como la regla de Simpson, surgió la idea de rephrasear la propiedad de integración de la transformada de Fourier en tiempo continuo (integrar en tiempo equivale a dividir en frecuencia entre  $j\omega$ ) en términos de la transformada discreta de Fourier (DFT), de señales discretas de longitud finita.

En las secciones 3 y 4 se presenta la relación entre los coeficientes de Fourier de una señal continua de longitud finita o periódica y la DFT de sus muestras, en particular, cómo cuando la señal es limitada en frecuencia y se toma un

número suficiente de muestras, toda su información se encuentra en la DFT. Esta relación es similar a la de muestreo para la transformada de Fourier en tiempo continuo [3],[4] y permite justificar teóricamente el método de integración en el dominio de la frecuencia que se presenta en la sección 5. Este método se emplea en la sección 6 para integrar las señales sísmicas de aceleración antes mencionadas.

## 2. DEFINICIONES Y NOTACIÓN

$T$  es un número real positivo y  $N$  es un entero mayor que cero;  $/0, N-1/$  es el intervalo de números enteros entre 0 y  $N-1$ ;  $[m]_n$  (" $m$  módulo  $n$ ") denota el residuo de la división entera de  $m$  entre  $n$ .

$g: [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  es una señal continua<sup>1</sup> de longitud finita suave a trozos, es decir tanto  $g$  como  $g'$  están definidas en todo el intervalo y son fun-

\* Estudiante de Ing. Eléctrica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. e-mail: c-vejara@uniandes.edu.co

\*\* Profesor Asociado, Departamento de Ing. Eléctrica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. e-mail: arestrepo@uniandes.edu.co

<sup>1</sup> El término *señal continua* se refiere a una señal con dominio continuo como opuesto a discreto, no una *función continua* en el sentido usado en cálculo.

ciones continuas excepto en un subconjunto finito de puntos donde los límites izquierdo y derecho existen, y:

$$g(t) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{\tau \rightarrow t^+} g(\tau) + \lim_{\tau \rightarrow t^-} g(\tau) \right] \quad \forall t \in [0, T] \quad (1)$$

$$g(0) = g(T) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) + \lim_{t \rightarrow T^-} g(t) \right]$$

Los resultados que se derivarán, así como el método de integración, aplican también si se considera una señal periódica con periodo  $T$  y entonces se requiere que la condición (1) se cumpla para todo  $t$  en  $\mathbb{R}$ .

Bajo estas condiciones  $g$  está dada por su serie de Fourier [2]. Llamando los  $c_m$  coeficientes de Fourier de  $g$ , tenemos:

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\Omega_0 t}, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

$$\text{con } c_m = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-jm\Omega_0 t} dt, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

Sea  $x: /0, N-1/ \rightarrow \mathbb{C}$  una señal discreta de longitud finita, correspondiente a  $N$  muestras de  $g$  igualmente espaciadas en el intervalo  $[0, T]$  (figura. 1):

$$x_n = g\left(\frac{nT}{N}\right), \quad n \in /0, N-1/ \quad (4)$$

Para el caso de una señal periódica, esto indica que se toman exactamente  $N$  muestras en un periodo.

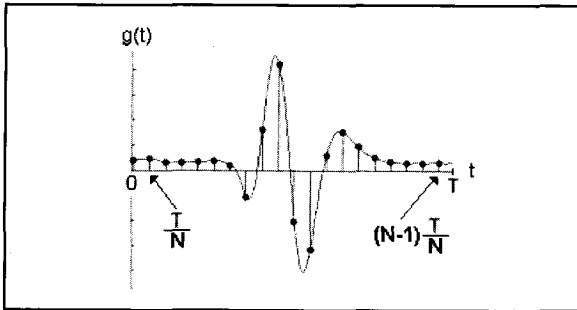


Figura 1. Señal continua de longitud finita y sus muestras.

Recordemos que la Transformada discreta de Fourier o DFT,  $X_k$ , de  $x_n$ , y su inversa son:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k \in /0, N-1/ \quad (5)$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n \in /0, N-1/ \quad (6)$$

Además, se utilizará el siguiente resultado:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}na} = \begin{cases} N, & \text{si } a = rN, r \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si no} \end{cases} \quad (7)$$

### 3. RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE FOURIER Y LA DFT

De las expresiones para  $X_k$  (5) y  $x_n$  (4) se tiene:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{nT}{N}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\Omega_0 \frac{nT}{N}} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\frac{2\pi}{N}n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned}$$

Cambiando el orden de las sumas y reagrupando:

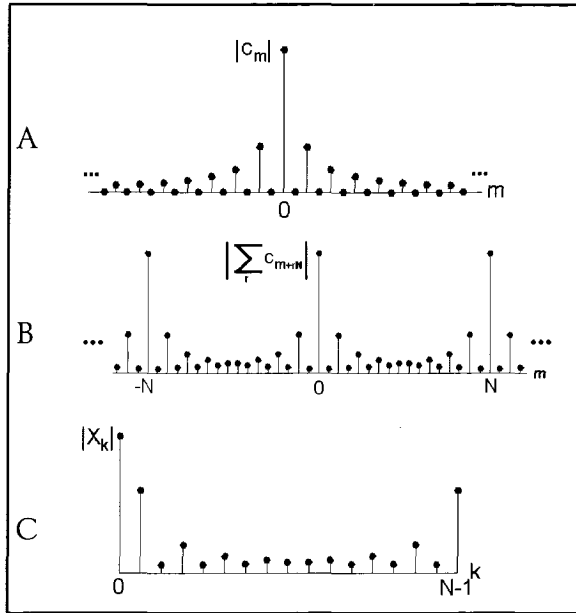
$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(m-k)}$$

Por (7), la suma sobre  $n$  se anula para todos los valores de  $(m-k)$  que no sean múltiplos de  $N$ ; sólo quedan los términos para los que  $(m-k) = rN$ , con  $r$  entero, es decir aquellos para los que  $m = rN + k$  y en ese caso dicha suma vale  $N$ , entonces se tiene que:

$$X_k = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{k+rN} \quad (8)$$

Entonces, la DFT de  $x_n$  es una suma de versiones desplazadas de los coeficientes de Fourier de  $g(t)$ .

En la figura 2 se muestra esta relación para una señal continua  $g(t)$  y sus muestras,  $x_n$ . Note que, como hay infinitos coeficientes  $c_m$ , hay contribuciones de muchas de las versiones desplazadas de los coeficientes en todos los componentes de la DFT (enmascaramiento).



**Figura 2.** (A) Coeficientes de Fourier  $c_m$  de una señal continua de longitud finita o periódica. (B) Suma de versiones desplazadas de  $c_m$ . (C) DFT,  $X_k$ , de las muestras,  $x_n$ .

#### 4. SEÑALES LIMITADAS EN FRECUENCIA

Ahora suponga que la señal  $g$  no tiene componentes para frecuencias mayores que cierto múltiplo de la fundamental  $\hat{U}_0$ , es decir que para cierta  $M$ , sus coeficientes de Fourier  $c_m$  se anulan para  $|m| > M$  (en adelante nos referiremos a esto como que la señal está limitada en frecuencia). Siendo así,  $g$  es una suma finita de sinusoides armónicamente relacionadas, es continua y tiene derivadas continuas de cualquier orden.

Si se toman  $N$  muestras de  $g$  (ver (4)) con  $N > 2M$  entonces, reorganizando el lado derecho de (8):

$$X_k = c_k + \sum_{r=1}^{\infty} (c_{k+rN} + c_{k-rN}) \quad (9)$$

Pero para  $0 \leq k \leq N/2$  y  $r > 0$  se tiene:

$$k + rN \leq N/2 \quad \text{si } rN \leq N/2 - k$$

Y la derecha de (9) es cero porque  $c_m = 0$  para  $|m| > M$ , con lo cual:

$$X_k = c_k \quad \text{para } 0 \leq k \leq N/2 \quad (10)$$

En particular (porque  $N > 2M$ ):

$$c_m = X_m \quad \text{para } 0 \leq m \leq M \quad (11)$$

Ahora, reorganizando (8) de otra forma:

$$X_k = c_{k-N} + \sum_{r=0}^{\infty} c_{k+rN} + \sum_{r=2}^{\infty} c_{k-rN}$$

Y para  $N/2 < k < N$ ,

$$\begin{aligned} \text{si } r = 0, \quad k - N/2 < k - rN < N/2 > M \\ \text{si } r = 2, \quad k - rN < -N < -M \end{aligned}$$

Así, se anulan los dos términos de la derecha de la suma y,

$$X_k = c_{k-N} \quad \text{para } N/2 < k < N \quad (12)$$

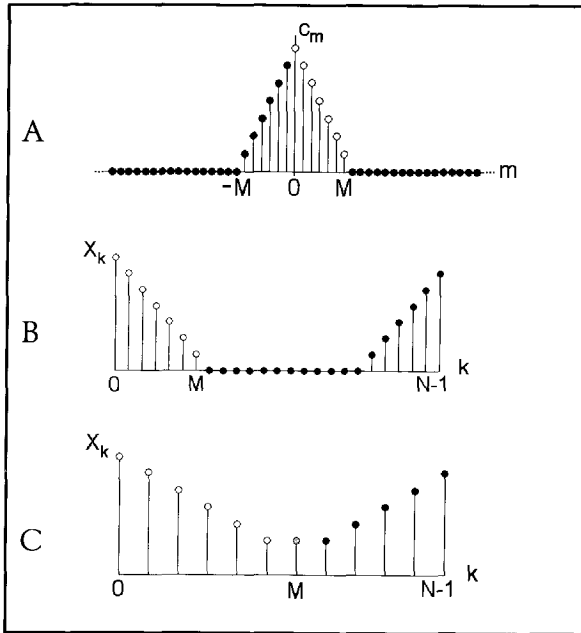
Y haciendo  $m = k - N$ ,  $k = m + N$ ,

$$\begin{aligned} X_{m+N} &= c_m \quad \text{para } N/2 < m + N < N \\ c_m &= X_{m+N} \quad \text{para } -M < m < 0 \end{aligned} \quad (13)$$

De (10) y (12) se tiene la relación:

$$X_k = \begin{cases} c_k, & \text{si } 0 \leq k \leq N/2 \\ c_{k-N}, & \text{si } N/2 < k < N \end{cases} \quad (14)$$

Que muestra que cada uno de los elementos de la DFT de las muestras de la señal  $g$  está determinado por uno y sólo uno de los coeficientes de Fourier de  $g$ , los coeficientes correspondientes a frecuencias positivas están dados por los primeros índices de la DFT de la señal muestreada, y aquellos correspondientes a frecuencias de Fourier negativas están en los índices altos (figura 3a,b). Si la señal  $g(t)$  no es limitada en frecuencia se presentará un traslape de versiones desplazadas de los coeficientes  $c_m$  en la DFT (figura 2c); lo mismo sucede si no se toma un número suficiente de muestras (figura 3c).



**Figura 3.** (A) Coeficientes de Fourier de una señal limitada en frecuencia. Se usa el color blanco para los coeficientes de frecuencias positivas para identificarlos en las siguientes figuras. (B) DFT de las muestras con  $N > 2M$ . (C) DFT de las muestras con  $N = 2M$ , enmascaramiento.

Por otra parte, de (11) y (13) se deduce que para  $m$  entre  $-M$  y  $M$  (por fuera de este intervalo son cero), los coeficientes de Fourier están dados en términos de la DFT por:

$$c_m = X_{[m]_N}, \quad -M \leq m \leq M \quad (15)$$

Esta relación indica que, dado que la señal  $g(t)$  está determinada completamente por sus coeficientes de Fourier, toda la información de la señal está contenida en sus muestras. De hecho, se puede obtener una fórmula de interpolación para recuperar  $g$  a partir de las muestras; reemplazando (15) en (2), para una señal limitada en frecuencia, se tiene:

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{m=-M}^M c_m e^{jm\Omega_0 t} = \sum_{m=-M}^M X_{[m]_N} e^{jm\Omega_0 t} \\ &= \sum_{m=-M}^M \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N} n[m]_N} \right) e^{jm\frac{2\pi}{T} t} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left( \sum_{m=-M}^M e^{-j\frac{2\pi}{N} n[m]_N} e^{jm\frac{2\pi}{T} t} \right) \quad (16) \end{aligned}$$

Pero para  $0 \leq m \leq M$ ,  $[m]_N = m$  porque  $M < N$  y entonces:

$$e^{-j\frac{2\pi}{N} n[m]_N} = e^{-j\frac{2\pi}{N} nm}, \quad 0 \leq m \leq M$$

Además para  $-M \leq m < 0$ ,  $[m]_N = m+N$ , con lo cual:

$$\begin{aligned} e^{-j\frac{2\pi}{N} n[m]_N} &= e^{-j\frac{2\pi}{N} nm - j\frac{2\pi}{N} nN} \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N} nm}, \quad -M \leq m < 0 \end{aligned}$$

Con estos dos resultados, la suma de (16) queda:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sum_{m=-M}^M e^{jm2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{n}{N} \right)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n SE_M \left( 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{n}{N} \right) \right) \quad (17) \end{aligned}$$

Donde  $SE_M(x)$  es el senc enmascarado de orden  $M$ , también conocido como núcleo de Dirichlet (figura 4):

$$\begin{aligned} SE_M(x) &= \sum_{m=-M}^M e^{jmx} \\ &= \begin{cases} \frac{2M+1}{\text{sen}((M+1/2)x)} & \text{si } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\text{sen}(x/2)}{\text{sen}(x/2)} & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

Así, con (17) se puede recuperar la señal original a partir de sus muestras sumando sencs enmascarados escalados y desplazados, siempre y cuando ésta sea limitada en frecuencia y se tome un número de muestras suficientemente alto.

Esta fórmula de interpolación es similar a la que se tiene en la relación de muestreo para señales de longitud finita (interpolación con sencs en la relación entre la CTFT y la DTFT), pero difiere en un aspecto interesante, y es que los sencs enmascarados centrados en cada muestra no necesariamente se anulan en los instantes correspondientes a las demás muestras, de hecho esto sucede sólo si  $N = 2M+1$ , de lo contrario, para todos los valores de  $t$  (incluidos los que corresponden a una muestra), habrá contribuciones de los  $N$  sencs enmascarados; más aún, si los coeficientes de Fourier

de  $g$ ,  $c_m$ , se anulan para  $|m| > M_{\min}$  y  $N > 2M_{\max}$  con  $M_{\max} > M_{\min}$ , entonces cualquier  $M$  entre  $M_{\max}$  y  $M_{\min}$  se puede utilizar en la fórmula (17) y el resultado será el mismo: una interpolación correcta.

Esta fórmula puede utilizarse para interpolar funciones periódicas a través de un conjunto dado de muestras y también para unir puntos en  $\mathbb{R}^N$  con curvas cerradas suaves [5].

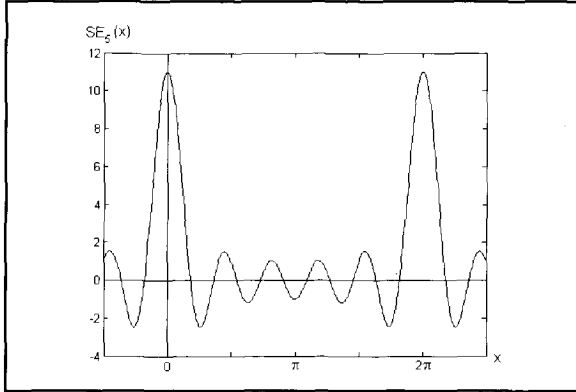


Figura 4. Senc enmascarado de orden 5.

## 5. INTEGRACIÓN DE SEÑALES LIMITADAS EN FRECUENCIA

Para señales continuas como las descritas en la sección 2, se tiene la siguiente propiedad de integración de las series de Fourier: si  $g(t)$  es una señal continua de longitud finita definida en  $[0, T]$  o periódica con periodo  $T$ , con coeficientes de Fourier  $c_m$  con  $c_0 = 0$  (es decir su media o "nivel D.C." es cero), y se define

$$G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

Entonces  $G(t)$  está dada por la serie [2]:

$$G(t) = C_0 + \sum_{m \neq 0} \frac{c_m}{jm\Omega_0} e^{jm\Omega_0 t} \quad (18)$$

Donde

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T G(t) dt \quad (19)$$

es el promedio de  $G(t)$ . Además, si  $c_0 = 0$ , la serie de la derecha de (18) converge a  $G(t) - tc_0$  [2].

Es decir, que si  $g$  tiene media cero, los coeficientes de Fourier de su integral son los coeficientes de  $g$  divididos entre  $jm\Omega_0$ , exceptuando el término constante que queda indeterminado y debe ser fijado de acuerdo a algún criterio según la aplicación. En ese sentido (18) es la fórmula de la integral indefinida de  $g$  (note que (19) no es una fórmula para calcular  $C_0$ , es simplemente una consecuencia de (18)).

A continuación se muestra cómo se puede integrar  $g(t)$  usando la DFT (en el dominio de la frecuencia); si  $g$  es limitada en frecuencia, tiene media cero y se toman suficientes muestras ( $N > 2M$ ), la propiedad (18) puede ser usada para calcular su función integral a partir de las muestras  $x_n$ , definiendo una nueva señal  $y_n$  con DFT  $Y_k$  así:

$$\begin{aligned} X_k &= DFT(x_n) \\ Y_k &= \begin{cases} \frac{X_k}{j\Omega_0 k}, & \text{si } 1 \leq k \leq N/2 \\ \frac{X_k}{j\Omega_0 (k-N)}, & \text{si } N/2 < k < N \\ C_0, & \text{si } k = 0 \end{cases} \\ y_n &= DFT^{-1}(Y_k) \end{aligned}$$

Con esto, por la relación (14), efectivamente se están dividiendo los coeficientes  $c_m$  de Fourier de  $g(t)$  (excepto el término constante que es cero) entre  $jm\Omega_0$  y se está fijando la media de  $y_n$  en  $C_0$ ; por tanto los coeficientes de  $G(t)$  son, por (15):

$$C_m = Y_{[m]_N}, \quad -M \leq m \leq M \quad (20)$$

Y en efecto, la señal  $y_n$  corresponde a muestras de la integral de  $g$ , ya que al reemplazar (20) en la serie para  $G$  se obtiene:

$$\begin{aligned} G\left(\frac{nT}{N}\right) &= \sum_{m=-M}^M C_m e^{j2\pi m \frac{n}{N}} = \sum_{m=-M}^M Y_{[m]_N} e^{j2\pi m \frac{n}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^M Y_m e^{j\frac{2\pi}{N} mn} + \sum_{m=-M}^{-1} Y_{(m+N)} e^{j\frac{2\pi}{N} mn} \end{aligned}$$

Cambiando en la suma de la derecha  $m$  por  $m+N$ :

$$G\left(\frac{nT}{N}\right) = \sum_{m=0}^M Y_m e^{j\frac{2\pi}{N}mn} + \sum_{m=N-M}^{N-1} Y_m e^{j\frac{2\pi}{N}mn} e^{j\frac{2\pi}{N}Nn}$$

$$= \sum_{m=0}^M Y_m e^{j\frac{2\pi}{N}mn} + \sum_{m=N-M}^{N-1} Y_m e^{j\frac{2\pi}{N}mn} \quad (21)$$

Y como  $N > 2M$ , entonces  $N-M > M$  y (21) es igual a la suma desde  $m=0$  hasta  $N-1$  exceptuando los términos con  $M < m < N-M$ , pero para estos,  $Y_m = 0$  (observar la figura 3b) y se puede escribir:

$$G\left(\frac{nT}{N}\right) = \sum_{m=0}^{N-1} Y_m e^{j\frac{2\pi}{N}mn} = y_n \quad (22)$$

Que es lo que se quería mostrar. Más aún, note que  $G(t)$  cumple con las condiciones de limitación en frecuencia y de número suficiente de muestras y puede determinarse su valor para cualquier valor de  $t$  con la fórmula de interpolación (17).

Si la media de  $g(t)$  no es cero ( $c_0 \neq 0$ ), aún puede utilizarse el método considerando la señal  $f(t) = g(t) - c_0$  que, exceptuando la media (que es cero), tiene los mismos coeficientes que  $g$ . Se obtiene la integral de  $f$ ,  $F(t)$ , en el dominio de la frecuencia y luego se integra el término constante llegando a  $G(t) = F(t) + tc_0$ . En el dominio discreto, esto equivale a integrar la señal  $x_n$  y después sumar  $(X_0 nT/N)$  a la señal  $y_n$  resultante.

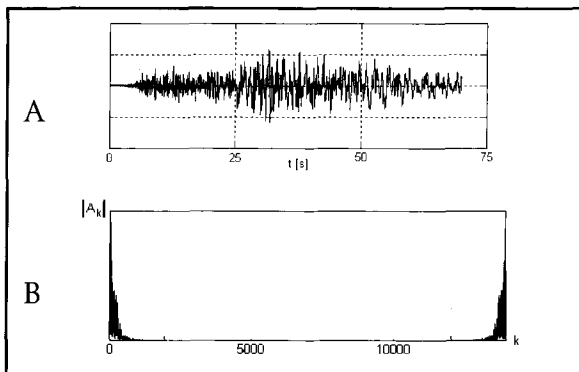


Figura 5. (A) Señal sísmica digital de aceleración. (B) Magnitud de su DFT.

## 6. APLICACIÓN A INTEGRACIÓN DE SEÑALES SÍSMICAS DE ACELERACIÓN.

Una forma de registrar movimientos sísmicos es mediante acelerómetros digitales que entregan una señal discreta de aceleración y que proveen la facilidad de almacenamiento y de tratamiento de las señales digitales (para detalles de su operación se pueden consultar los manuales en [6]). Aparte de la aceleración, es de interés determinar la velocidad y el desplazamiento, por ejemplo para calcular deformaciones máximas en estructuras. Esto se logra integrando la señal de aceleración, ya que el desplazamiento es la derivada de la velocidad y ésta a su vez lo es de la aceleración.

$a(t)$ : aceleración.

$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau + v(0)$ : velocidad.

$d(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau + d(0)$ : desplazamiento.

Los acelerómetros comienzan a registrar la señal cuando la aceleración supera cierto umbral, y éste será el instante  $t=0$ , se supone que antes de ese momento no había movimiento (o era despreciable) y por tanto la velocidad inicial se aproxima a cero,  $v(0)=0$ ; además se toma como referencia el desplazamiento inicial,  $d(0)=0$ . El registro termina después de un tiempo  $T$  cuando el movimiento está prácticamente extinguido, así,  $a$ ,  $v$ ,  $d$  son señales de longitud finita definidas en  $[0, T]$  y el acelerómetro produce una señal discreta de longitud finita  $a_n$ .

Los movimientos sísmicos generan señales de carácter ondulatorio, apropiadas para ser modeladas como sumas de sinusoides, y además con componentes de alta frecuencia muy pequeñas. Por otra parte, es importante notar que si la señal efectivamente es limitada en frecuencia y está adecuadamente muestreada, los componentes centrales de la DFT de las muestras (correspondientes a frecuencias altas) son cero; entonces, el hecho de que los componentes centrales de la DFT de la señal de aceleración

sean nulos (o muy pequeños), aunque no lo garantiza, es un buen indicio de que esta cumple con las condiciones de limitación en frecuencia y número suficiente de muestras (figura 5).

Si se consideran movimientos sísmicos que no producen deformaciones permanentes (y este no es necesariamente el caso, sobre todo para los más intensos), es decir, con desplazamiento neto nulo,  $d(0)=d(T)$ , la velocidad media debe ser cero, ya que:

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = (d(T) - d(0))/T = 0 \quad (23)$$

Como las velocidades inicial y final son ambas iguales a cero, por un argumento análogo la aceleración media también debe ser cero. Esto es importante ya que las señales obtenidas directamente de los acelerómetros pueden tener una componente D.C. apreciable (también conocida como línea de base) que entonces debe ser removida. Si la señal continua  $a(t)$  es limitada en frecuencia y se toma un número suficiente de muestras, es posible aplicar el método de integración en el dominio de la frecuencia para obtener la velocidad, fijando su media en cero por (23):

$$\begin{aligned} A_k &= DFT(a_n) \\ V_k &= \begin{cases} \frac{A_k}{j\Omega_0 k}, & \text{si } 1 \leq k \leq N/2 \\ \frac{A_k}{j\Omega_0 (k-N)}, & \text{si } N/2 < k < N \\ 0, & \text{si } k = 0 \end{cases} \\ v_n &= DFT^{-1}(V_k) \end{aligned}$$

Y la señal  $v_n$  corresponde a muestras de la señal de velocidad  $v(t)$  por (22).

La señal de velocidad también puede ser integrada de la misma forma, obteniendo el desplazamiento; sin embargo, la media de  $d(t)$  (y por tanto de  $d_n$ ) no necesariamente es cero y el criterio para fijarla viene de la condición  $d(0)=0$ ; si  $d'_n$  es la señal discreta de desplazamiento obtenida al integrar  $v_n$  fijando su media

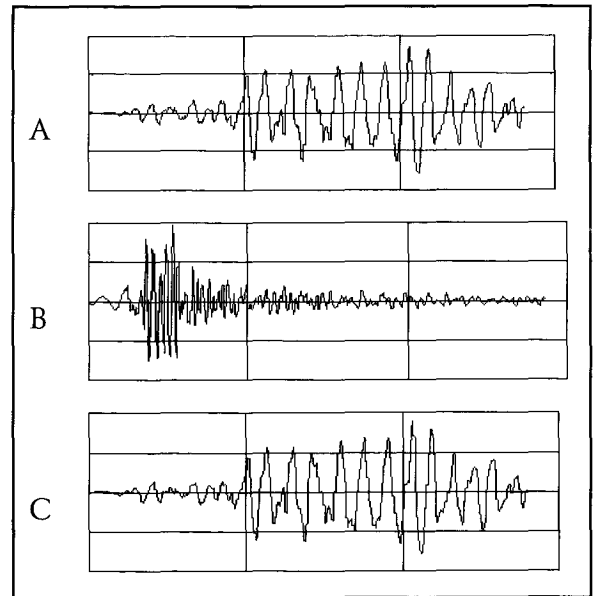
en cero ( $D'_0=0$  en la DFT), es posible que el desplazamiento inicial  $d'_0$  sea no nulo.

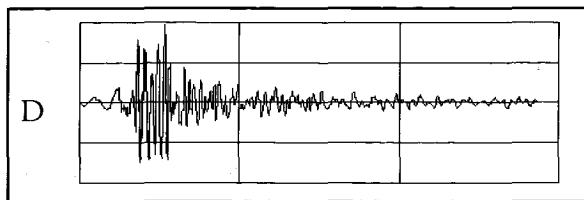
Para corregir esto, y habiendo convenido que el desplazamiento inicial debe ser cero, se genera una nueva señal de desplazamiento corregida  $d_n = d'_n - d'_0$ , que es la misma señal  $d'$  pero con la media tal que  $d_0=0$ ; y entonces  $d_n$  corresponderá a muestras de la señal análoga  $d(t)$ :

$$\begin{aligned} D'_k &= \begin{cases} \frac{V_k}{j\Omega_0 k}, & \text{si } 1 \leq k \leq N/2 \\ \frac{V_k}{j\Omega_0 (k-N)}, & \text{si } N/2 < k < N \\ 0, & \text{si } k = 0 \end{cases} \\ d'_n &:= DFT^{-1}(D'_k) \\ d_n &:= d'_n - d'_0 \end{aligned}$$

En la práctica, se ha visto que algunos acelerómetros tienen dificultades para registrar adecuadamente los componentes de aceleración de baja frecuencia, y puede ser necesario un filtrado adicional para eliminar las mediciones erróneas que introducen.

En la figura 6 se muestran dos señales de desplazamiento de referencia [1] obtenidas usando métodos de integración convencionales (a,b) y el desplazamiento  $d_n$  al integrar en el dominio de la frecuencia (c,d), puede apreciarse como concuerdan bastante bien.





**Figura 6.** (A,B) Señales sísmicas digitales de desplazamiento de referencia de Ingeominas. (C,D) Señales de desplazamiento correspondientes calculadas integrando en el dominio de la frecuencia.

## 7. CONCLUSIONES

Se presentaron los fundamentos teóricos para integrar señales continuas de longitud finita o periódicas en el dominio discreto, utilizando la relación entre los coeficientes de Fourier y la DFT, y viendo la limitación en frecuencia en el dominio de los coeficientes de Fourier. En el caso de las señales de longitud finita esto representa una nueva opción respecto al enfoque tradicional de considerarlas versiones truncadas de las de longitud infinita, que corresponde a usar la relación de muestreo entre la CTFT y la DTFT.

Para señales limitadas en frecuencia en el sentido de los coeficientes de Fourier, el método de integración propuesto no es una aproximación, sino que *a partir de las muestras de la señal se obtienen muestras de la integral*, que además pueden servir para reconstruirla en cualquier instante entre muestras con la fórmula de interpolación que se presentó. Si el número de muestras es potencia de 2, es posible utilizar algoritmos de FFT para hacer más rápido el método.

La integración en el dominio de la frecuencia puede usarse como técnica alternativa en el análisis de señales sísmicas.

Un trabajo futuro interesante puede ser estimar el error introducido por el método si se consideran señales que no son estrictamente limitadas en frecuencia pero cuyos coeficientes de Fourier decaen con cierta rapidez, haciendo que el enmascaramiento no sea importante.

Además, la fórmula de interpolación con senos enmascarados, permitió el desarrollo de un trabajo sobre interpolación con curvas cerradas suaves a través de puntos en un espacio multidimensional [5].

## REFERENCIAS

- [1] Informe final – Proyecto de Procesamiento e Interpretación de la Información Sísmica de Bogotá D.C., Centro de Estudios sobre Desastres y Riesgos – CEDERI, Universidad de los Andes, Agosto 4 de 2002, <http://www.sire.gov.co/Sismo/red/InformeFinalDPAE.pdf>
- [2] Gerald B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California, 1992.
- [3] Alfredo Restrepo P, *Introducción a la Teoría de Señales y Sistemas*, Bogotá, Colombia, 2000.
- [4] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliff, New Jersey, 1975.
- [5] Camilo Vejarano A. y Alfredo Restrepo P., *Interpolación con curvas cerradas multidimensionales*, a presentarse en el VIII Simposio de tratamiento de Señales, Imágenes y Visión Artificial, Medellín, noviembre de 2003.
- [6] Manuales de los acelerómetros de Kinematics, Inc., en [http://www.kinematics.com/eng\\_ftp/manuals.html](http://www.kinematics.com/eng_ftp/manuals.html)